

Esercizi sulle equazioni di secondo grado

Premesse

- 1) Ricordiamo che per il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ sussiste la seguente scomposizione in fattori

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (1)$$

dove x_1, x_2 sono le radici dell'equazione di secondo grado associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- 2) Nell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ sussistono le seguenti relazioni tra i coefficienti a, b, c e la somma ed il prodotto delle radici

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

*** **

1) Semplificare le seguenti frazioni algebriche

$$\text{a) } \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 - x - 1} \quad \text{b) } \frac{2x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 3} \quad \text{c) } \frac{x^2 - 4}{5x^2 - 7x - 6}$$

Soluzioni

- a) Scomponiamo in fattori i trinomi che compaiono al numeratore e al denominatore applicando la (1).

$$x^2 + 5x - 6 = 0, \text{ da cui } x_2^1 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}; \text{ le due radici sono } x_1 = -6; x_2 = 1.$$

$$\text{Sussiste la scomposizione in fattori: } x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1).$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x_2^1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}; \text{ le due radici sono } x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 1.$$

Il trinomio al denominatore si scompone come segue:

$$2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x + 1)(x - 1)$$

Semplificazione della frazione

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 - x - 1} = \frac{(x + 6)\cancel{(x - 1)}}{(2x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \frac{x + 6}{2x + 1}, \text{ con la condizione di equivalenza (C.d.Eq.) } x \neq 1.$$

...

Esercizi proposti

Verificare che sussistono le seguenti semplificazioni

- a) $\frac{x^2-6x-7}{6x^2-x-7} = \frac{x-7}{6x-7}$, C.d.Eq.: $x \neq -1$
- b) $\frac{9-x^2}{5x^2+7x-24} = \frac{3-x}{5x-8}$, C.d.Eq.: $x \neq -3$
- c) $\frac{6x^2-5x-14}{3x^2 6x} = \frac{6x+7}{3x}$, C.d.Eq.: $x \neq 2$

*** **

2) Equazioni razionali fratte

Risolvere le seguenti equazioni

- a) $\frac{x}{2x^2-1} - \frac{1}{x} = 0$ b) $\frac{x-3}{2x^2+x-15} - \frac{x+1}{x+3} = 0$

Soluzioni

a) $\frac{x}{2x^2-1} - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - (2x^2 - 1)}{x(2x^2 - 1)} = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0$, con le C.d.E.: $(x \neq 0) \wedge (2x^2 - 1 \neq 0)$.

L'equazione semplificata ammette come radici i valori $x_1 = -1, x_2 = 1$, che verificano le C.d.E., quindi sono accettabili come soluzioni dell'equazione in esame. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{-1; 1\}$.

...

Esercizi proposti

Risolvere le equazioni che seguono

- 1) $\frac{2+x}{x^2-4x+3} + \frac{4-x}{(x-1)(x+3)} = \frac{14}{x+3}$ $\left[x_1 = 4; x_2 = \frac{6}{7} \right]$
- 2) $\frac{3}{2x-1} - \frac{x+2x^2}{2(1-4x^2)} = 0$ $[x_1 = -6]$
- 3) $\frac{4+3x}{x^2-3x} + \frac{x+1}{x^2-9} = 0$ $\left[x_1 = -2; x_2 = -\frac{3}{2} \right]$

$$4) \frac{1}{2x^2 + x - 1} + \frac{2x}{3(x^2 - 1)} = 0 \quad \left[x_1 = \frac{3}{4} \right]$$

$$5) \frac{x}{2x^2 - x - 15} + \frac{1}{2} = \frac{2x + 6}{x - 3} = 0 \quad \left[x_1 = -\frac{25}{3}; x_2 = -3 \right]$$

$$6) \frac{1}{1-x} - \frac{2}{2-x} = \frac{3}{2} \quad \left[x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = 3 \right]$$

*** **

Equazioni parametriche

1) Nell'equazione parametrica $\frac{x}{3x+5} - \frac{x+k}{3+x} = 0$ risolvere i quesiti che seguono.

- a. Trovare il valore di k tale che $x=-1$ sia radice dell'equazione. Per il valore di k determinato trovare l'eventuale seconda radice dell'equazione corrispondente.

Risposte: $k = 0; x_2 = 0$.

- b. Determinare per quale valore del parametro k l'equazione ammette come radice $x_1 = \frac{1}{2}$. Per il corrispondente valore di k determinare la seconda radice.

Risposte: $k = -\frac{3}{13}; x_2 = -\frac{15}{13}$

- c. Trovare il valore di k tale che una radice sia $x=4$

Soluzione

...

2) Nell'equazione parametrica $(2k-3)x^2 - x - 4k = 0$ determinare i valori del parametro k per i quali sono rispettivamente soddisfatte le seguenti richieste:

- a) Una radice dell'equazione sia $x=-1$. Per il valore trovato determinare la seconda radice dell'equazione.
- b) La somma delle radici dell'equazione sia $1/2$. Determinare le radici della corrispondente equazione.
- c) Il prodotto delle radici dell'equazione sia $-11/5$. Determinare le radici della corrispondente equazione.

Soluzione

...